

Лекция 8

Тема. Исследование функции и построение графика.

План лекции:

- 1) Локальный экстремум функции. Возрастание и убывание функции.
- 2) Глобальный экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке.
- 3) Точки перегиба функции. Исследование функции на выпуклость.
- 4) Асимптоты.
- 5) Схема построения графика функции.

§1. Локальный экстремум функции. Возрастание и убывание функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0 , в которой при $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ [соответственно $f(x) > f(x_0)$]. Точки локального максимума и минимума называют *точками экстремума функции*. Локальный максимум и локальный минимум функции объединяются общим названием *локальный экстремум функции* (или экстремальные значения функции). Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются точками *возможного экстремума* (или критическими точками).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции*.

Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которой меняется знак первой производной. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ее производная положительна или равна 0 на интервале (a, b) , то $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$. ($f'(x) \geq 0$). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ее производная отрицательна или равна 0 на интервале (a, b) , то $y = f(x)$ убывает на $[a, b]$. ($f'(x) \leq 0$).

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю ($f'(x_0) = 0$), или не существует.

Теорема (первое достаточное условие существования экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки возможного экстремума (за исключением, быть может, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум (минимум). Если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знака, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет экстремума.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть в точке x_0 возможного экстремума функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x_0)$. Тогда если $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум).

Алгоритм исследования функции на экстремум.

1⁰. Найти производную функции.

2⁰. Найти критические точки, т. е. точки, в которых функция непрерывна, а производная равна нулю или не существует.

3⁰. Рассмотреть окрестность каждой из точек и исследовать знак производной слева и справа от этой точки.

4⁰. Определить координаты экстремальных точек. Для этого значения критических точек подставить в данную функцию. Используя достаточные условия экстремума, сделать соответствующие выводы.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$

Решение. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$. Приравняв производную нулю, находим $x_1 = 2, x_2 = 4$. В данном случае производная определена всюду; значит, кроме двух найденных точек, других критических точек нет. Знак производной $y' = 3(x-2)(x-4)$ изменяется в зависимости от промежутка. При переходе через точку $x = 2$, производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 4$ с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x = 2$ функция имеет максимум, $y_{\max} = 20$, а в точке $x = 4$ - минимум $y_{\min} = 16$.

§2. Глобальный экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке.

На отрезке $[a; b]$ функция $y=f(x)$ может достигать наименьшего ($y_{\text{наим}}$) или наибольшего ($y_{\text{наиб}}$) значения либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a; b)$, либо на концах отрезка $[a; b]$. То есть, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение (глобальный максимум и минимум) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, следует сначала найти все значения экстремума функции в интервале (a, b) , а потом найти значения функции на концах отрезка (т.е. в точках a и b), затем среди всех этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Теорема. Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ имеет единственную точку экстремума, то в этой точке достигается наибольшее или наименьшее значение (глобальный максимум или минимум) функции на интервале (a, b) .

Подытожим:

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

1⁰. Найти $f'(x)$.

2⁰. Найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, которые лежат внутри отрезка $[a; b]$.

3⁰. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных в п.2), а так же на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее: они и являются соответственно наибольшим ($y_{\text{наиб}}$) и наименьшим ($y_{\text{наим}}$) значениями функции на отрезке $[a; b]$.

Пример 2. Найти наибольшее значение непрерывной функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение. $y' = 3x^2 - 6x - 45$. Производная y' существует при всех x . Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$; получим $3x^2 - 6x - 45 = 0$, $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 5$. Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь точка $x = 5$. Вычислим значение функции в точках $x = 0$, $x = 5$ и $x = 6$;

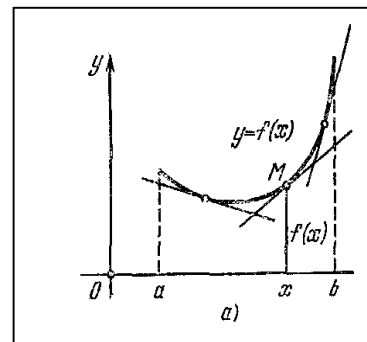
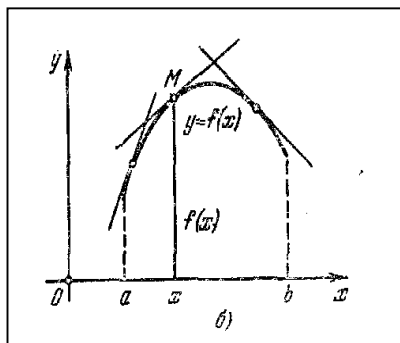
X	0	5	6
Y	225	50	63

Наибольшим из найденных значений функции является 225, а наименьшим – число 50. Итак, $y_{\text{наиб}}=225$, $y_{\text{наим}}=50$.

§3. Точки перегиба функции. Исследование функции на выпуклость.

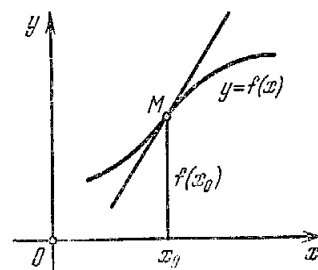
Пусть функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную производную. Тогда в каждой точке $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ кривая $y = f(x)$ имеет касательную, не параллельную оси Oy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз)* на интервале (a, b) , если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$ расположена не выше (не ниже) касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ (см. рис. б, с).



Теорема. Если на интервале (a, b) существует вторая производная функции $y = f(x)$ и если эта производная неотрицательна $f''(x) \geq 0$ (не положительна $f''(x) \leq 0$) всюду на этом интервале, то кривая $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точкой перегиба кривой $y = f(x)$ называется точка $M(x_0; f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет свою выпуклость вниз на выпуклость вверх или наоборот. Говорят также, что в точке $M(x_0; f(x_0))$ кривая имеет перегиб.



Теорема (необходимое условие перегиба). Если кривая $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$ и вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема (достаточное условие перегиба). Если в некоторой окрестности точки x_0 существует вторая производная функции $y = f(x)$, причем $f''(x_0) = 0$, и в пределах этой окрестности слева и справа от точки x_0 знаки $f''(x)$ различны, то кривая имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба

- 1) Найти точки, в которых $f''(x)$ не существует или обращается в нуль.
- 2) Исследовать знак $f''(x)$ слева и справа от каждой найденной на первом шаге точки.
- 3) На основании сформулированных теорем сделать соответствующий вывод.

Пример 3. Найти точки экстремума и точки перегиба графика функции $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$

Решение. Имеем $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2$. Очевидно, что $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Производная при переходе через точку $x = 0$ меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x = 1$ не меняет знака. Значит, $x = 0$ - точка минимума ($y_{\min} = 12$), а в точке $x = 1$ экстремума нет. Далее, находим $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 36(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Вторая производная обращается в нуль в точках $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Знаки второй производной изменяются следующим образом: На луче $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем $f''(x) > 0$, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ имеем $f''(x) < 0$,

на луче $(1; +\infty)$ имеем $f''(x) > 0$. Следовательно, $x = \frac{1}{3}$ - точка перегиба графика функции (переход с выпуклости вниз на выпуклость вверх) и $x = 1$ - так же точка перегиба (переход с выпуклости вверх на выпуклость вниз). Если $x = \frac{1}{3}$, то $y = 12\frac{11}{27}$; если $x = 1$, то $y = 13$.

§4. Асимптоты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов этой функции в точке $x = a$ равен $+\infty$ или $-\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$.

Вертикальные асимптоты следует искать среди точек разрыва II рода. Очевидно, непрерывные функции (в частности многочлены) не имеют вертикальных асимптот.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$.

Если наклонная асимптота существует, то коэффициенты k и b находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Аналогично определяется наклонная асимптота и для случая $x \rightarrow -\infty$. Если число $k = 0$, то наклонную асимптоту обычно называют горизонтальной.

Пример 4. Найти асимптоты для функции $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5}$.

Решение. Очевидно, вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва. Далее

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x(2x^2 + 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^3 + 5x} = \frac{1}{2}; \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x^2 - 5x + 6}{4x^2 + 10} = -3, \quad \Rightarrow b = -3.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = \frac{1}{2}x - 3$.

§5. Схема построения графика функции.

При исследовании функции и построении ее графика предлагается следующая *примерная схема*:

- I. Найти область определения функции.
- II. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
- III. Найти асимптоты.
- IV. Найти точки возможного экстремума.
- V. Найти точки возможного перегиба.
- VI. С помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремумов и точек перегиба.
- VII. Построить график, учитывая исследование, проведенное в п.1-6.

Пример 5. Построить график функции $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Решение.

- I. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$.

II. Так уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ох, но пересекает ось Оу в точке (0;-1).

III. Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 1$. Так как $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1-0$, $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1+0$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции. Если $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то $y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow -\infty$); следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{x^2 + 1}{x-1} - x \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1+x}{x-1} = 1$$

следует, что при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

VI. Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, получаем две точки возможного экстремума:

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ и } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

V. Для нахождения точек возможного перегиба вычислим вторую производную:

$$y'' = (f'(x))' = \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{((x-1)^2)^2} =$$

$$\frac{(x-1)((2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 1))}{((x-1)^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3};$$

$f''(x)$ в нуль не обращается, но при $x=1$ не существует.

VI. Исследуем знак первой и второй производных. Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, разделяют область существования функции на интервалы $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – плюс. Последовательность знаков первой производной запишется так: +, -, +.

Получаем, что функция на $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ возрастает, на $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ убывает, а на

$(1 + \sqrt{2}; +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: максимум при $x = 1 - \sqrt{2}$, причем $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$; минимум при $x = 1 + \sqrt{2}$, причем $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. На $(-\infty, 1)$ график направлен выпуклостью вверх, а на $(1, +\infty)$ - вниз.

VII. Составим таблицу полученных значений

X	$(-\infty; 1 - \sqrt{2})$	$1 - \sqrt{2}$	$(1 - \sqrt{2}; 1)$	1	$(1; 1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	+
$f''(x)$	- выпукла вверх	- выпукла вверх	- выпукла вверх	∞	+ выпукла вниз	+ выпукла вниз	+ выпукла вниз
$f(x)$		$y_{\max} = 2 - 2\sqrt{2}$		∞		$y_{\min} = 2 + 2\sqrt{2}$	

VIII. По полученным данным строим эскиз графика функции.

Пример 6. Провести полное исследование и построить график

функции $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

1) Область определения функции. Классификация её точек разрыва.

$$f(x): \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$x=0$ - точка разрыва II рода, так как $\lim_{x \rightarrow 0+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0+$$

2) Асимптоты кривой.

$x=0$ - вертикальная асимптота.

Найдём наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x} e^{\frac{1}{x}} = 1$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(x+2) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x + 1 + o(1) + 2 - x] = 3 \Rightarrow y = x + 3 - \text{наклонная асимптота при } x \rightarrow \pm\infty.$$

3) Периодичность. Чётность. Функция непериодическая, общего вида.

4) Нули функции. Промежутки сохранения знака.

$$y=0 \Leftrightarrow x=-2$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f(x)$	-	0	+	$\nexists$	+

5) Экстремумы функции. Промежутки

$$\text{монотонности. } y' = e^{\frac{1}{x}} - (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=2, \quad x=-1;$$

$$y' \neq \infty;$$

$$\nexists y' \text{ при } x=0.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\max, \frac{1}{e}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\min, 4\sqrt{e}$	$\nearrow$

6). Точки перегиба.

Промежутки

выпуклости функции.

$$y'' = \frac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2 - x - 2)}{x^4} e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2 - x - 2}{x^2 x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{5x+2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5};$$

$$y'' \neq \infty;$$

$$\nexists y'' \text{ при } x=0.$$

x	$(-\infty; -\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	$\nexists$	+
$f(x)$	$\cap$	т.п., $\frac{8}{5e^2\sqrt{e}}$	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

7) Особенности функции.

Определим угол, под которым график функции приближается к началу координат слева:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 0 - \text{это предел, к которому стремится тангенс угла наклона к оси}$$

абсцисс левой полукасательной к графику функции в начале координат; следовательно, этот угол равен 0° .

Задание. По приведенному исследованию постройте график самой функции.

